Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
P.200 — 17 giugno 2014
Durata: 3 ore

**Attenzione: Riconsegnerete TRE fogli (protocollo bianco, a 4 facciate), scriverete chiaramente cognome e nome e NUMERO (1,2, o 3) ben in vista, su ciascuno. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.**

# 1

**1.1** Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -V_k'(x)$$

$x \in \mathbb{R}$, dove $V_k'(x)$ è la derivata della funzione

$$V_k(x) = kx(x^2 - k)$$

Si tracci il ritratto in fase al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

**1.2** Cosa significa che i flussi di due campi vettoriali $X$ ed $Y$ sono coniugati da un diffeomorfismo? Qual è la relazione tra $X$ ed $Y$?

# 2

**2.1** Un disco omogeneo di massa $M$ e raggio $R$ è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse $x$ e a giacere senza attrito nel semipiano $Oxy$ con $y > 0$. L'asse $y$ del sistema $Oxyz$ è verticale ascendente, $\underline{g} = (0, -g, 0)$. Un punto materiale $P$ di massa $m$ è inoltre vincolato a scorrere senza attrito sull'asse $x$. Tra il baricentro $G$ del disco e il punto $P$ è tesa una molla di costante elastica $h > 0$. Il sistema $Oxyz$ è un riferimento associato ad uno spazio non inerziale che ruota uniformemente attorno all'asse $y$ con velocità angolare di trasc. $\underline{\omega} = (0, \omega, 0)$. Parametri Lagrangiani: l'ascissa $x$ di $P$ e un angolo orientato $\theta$ per il disco tale che $\theta = 0$ se e solo se $x_G = 0$. Scrivere l'Energia Potenziale delle forze conservative coinvolte, le Componenti Lagrangiane di Sollecitazione per le eventuali forze non conservative; determinare, o negare che esistano, motivando in dettaglio, condizioni sui dati strutturali, $\omega > 0, g > 0, h > 0, m > 0, M > 0, R > 0$, affinché l'ovvio equilibrio –determinarlo– sia unico e stabile. Scrivere l'Energia Cinetica del sistema.

**2.2** Studiare la stabilità delle rotazioni uniformi del corpo rigido scarico ($N_G^{ext} = 0$) attorno all'asse pr. d'inerzia mediano, cioè relativo al momento d'inerzia $I_2$ con $I_1 < I_2 < I_3$.

# 3

**3.1** Si determini con il metodo di integrazione di Hamilton-Jacobi la soluzione del problema di Cauchy

$$q_i(0) = p_i(0) = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

relativo alle equazioni canoniche associate all'Hamiltoniana $H : T^*\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$H = (p_1 + q_1)p_2 q_2 + p_3^4 q_3^4$$

**3.2** Supponiamo che la funzione Hamiltoniana $H(q, p)$ sia invariante lungo il flusso del sistema dinamico Hamiltoniano $X_K = \mathbb{E}\nabla K$, $K(q, p)$. Dire, motivando, quanti (almeno) e quali integrali primi ammette il sistema $X_H = \mathbb{E}\nabla H$.

Soluzioni

**2.1** Il lavoro delle forze di Coriolis su punto e disco risulta composizione di prodotti misti complanari, dunque le C. L. di Soll. di Coriolis sono identicamente nulle.

$$\mathcal{U}(x,\theta) = \frac{1}{2}h(x-R\theta)^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2 - \frac{M\omega^2}{2}R^2\theta^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} &= (h-m\omega^2)x - hR\theta \\ \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} &= -hRx + R^2(h-M\omega^2)\theta \end{cases}$$

Consideriamo l'equilibrio $(x^*,\theta^*) = (0,0)$, che sarà anche l'unico nel caso che la matrice $2\times 2$ sia non deg.

In quest'ultimo caso si può applicare il teorema dell'Hessiano non degenere: l'equilibrio $(x^*,\theta^*) = (0,0)$ è stabile se e solo se è def. positiva

$$\nabla^2\mathcal{U}(0,0) = \begin{pmatrix} h-m\omega^2 & -hR \\ \\ -hR & R^2(h-M\omega^2) \end{pmatrix}$$

$$h-m\omega^2 > 0, \qquad \det \nabla^2\mathcal{U}(0,0) > 0$$

$$\begin{cases} h-m\omega^2 > 0 \\ \\ R^2(h-m\omega^2)(h-M\omega^2) - h^2R^2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\omega^2 < h \\ \\ \frac{mM}{m+M}\omega^2 > h \end{cases}$$

cioè

$$\frac{mM}{m+M} > m : \quad \text{assurdo, si pensi alla 'massa ridotta'},$$

non esiste alcuna scelta dei parametri strutturali affinché $(x^*,\theta^*) = (0,0)$ sia stabile.

**3.1**

$$q_i(0) = p_i(0) = 1, \quad i=1,2,3, \qquad H : T^*\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad H = (p_1+q_1)p_2q_2 + p_3^4q_3^4,$$

$$H(q,p) = f(H_1(q_1,p_1), H_2(q_2,p_2), H_3(q_3,p_3)), \qquad f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_3,$$

$$H_1(q_1,p_1) = p_1+q_1, \qquad H_2(q_2,p_2) = p_2q_2, \qquad H_3(q_3,p_3) = p_3^4q_3^4,$$

$$S(q,\tilde{p},t) = -f(\tilde{p}_1,\tilde{p}_2,\tilde{p}_3)t + \sum_{i=1}^{3} W_i(q_i,\tilde{p}_i)$$

$$H_i(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i,\tilde{p}_i)) = \tilde{p}_i, \qquad i=1,2,3$$

per l'ipotesi $\partial H_i/\partial p_i \neq 0$, le 3 equazioni ammettono forma normale

$$\frac{\partial W_i}{\partial q_i} = \varphi_i(q_i,\tilde{p}_i), \qquad W_i(q_i,\tilde{p}_i) = \int_{\bar{q}_i}^{q_i} \varphi_i(\lambda,\tilde{p}_i)d\lambda.$$

soluzioni particolari sono p.e. (si noti i segni positivi della scelta delle variabili in gioco), a meno di cost.,

$$\begin{array}{rclrcl} \frac{\partial W_1}{\partial q_1} &=& \varphi_1(q_1,\tilde{p}_1) = \tilde{p}_1 - q_1, & W_1(q_1,\tilde{p}_1) &=& q_1\tilde{p}_1 - \frac{1}{2}q_1^2 \\ \frac{\partial W_2}{\partial q_2} &=& \varphi_2(q_2,\tilde{p}_2) = \frac{\tilde{p}_2}{q_2}, & W_2(q_2,\tilde{p}_2) &=& \tilde{p}_2 \ln q_2 \\ \frac{\partial W_3}{\partial q_3} &=& \varphi_3(q_3,\tilde{p}_3) = \frac{(\tilde{p}_3)^{1/4}}{q_3}, & W_3(q_3,\tilde{p}_3) &=& (\tilde{p}_3)^{1/4} \ln q_3 \end{array}$$

In forma mista la trasformazione canonica è:

$$\begin{array}{rclrcl} p_1 &=& \tilde{p}_1 - q_1, & \tilde{q}_1 &=& q_1 - \tilde{p}_2 t \\ p_2 &=& \frac{\tilde{p}_2}{q_2}, & \tilde{q}_2 &=& \ln q_2 - \tilde{p}_1 t \\ p_3 &=& \frac{(\tilde{p}_3)^{1/4}}{q_3}, & \tilde{q}_3 &=& \frac{1}{4}(\tilde{p}_3)^{-\frac{3}{4}} \ln q_3 - t \end{array}$$

infine, in forma inversa:

$$\left\{\begin{array}{lllllll} p_1 &=& \tilde{p}_1 - \tilde{q}_1 - \tilde{p}_2 t, & \qquad & q_1 &=& \tilde{q}_1 + \tilde{p}_2 t \\ p_2 &=& \tilde{p}_2 \exp\{-[\tilde{q}_2 + \tilde{p}_1 t]\}, & & q_2 &=& \exp[\tilde{q}_2 + \tilde{p}_1 t] \\ p_3 &=& (\tilde{p}_3)^{1/4} \exp[-4(\tilde{p}_3)^{\frac{3}{4}}(\tilde{q}_3 + t)], & & q_3 &=& \exp[4(\tilde{p}_3)^{\frac{3}{4}}(\tilde{q}_3 + t)] \end{array}\right.$$

imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{array}{lllllll} 1 &=& \tilde{p}_1 - \tilde{q}_1, & \qquad & 1 &=& \tilde{q}_1 \\ 1 &=& \tilde{p}_2 \exp\{-\tilde{q}_2\} & & 1 &=& \exp \tilde{q}_2 \\ 1 &=& (\tilde{p}_3)^{1/4} \exp[-4(\tilde{p}_3)^{\frac{3}{4}} \tilde{q}_3], & & 1 &=& \exp[4(\tilde{p}_3)^{\frac{3}{4}} \tilde{q}_3] \end{array}$$

da cui

$$\tilde{q}_1 = 1, \quad \tilde{q}_2 = 0, \quad \tilde{q}_3 = 0$$

$$\tilde{p}_1 = 2, \quad \tilde{p}_2 = 1, \quad \tilde{p}_3 = 1$$

$$\left\{\begin{array}{lllllll} p_1 &=& 1 - t, & \qquad & q_1 &=& 1 + t, \\ p_2 &=& \exp[-2t], & & q_2 &=& \exp[2t], \\ p_3 &=& \exp[-4t], & & q_3 &=& \exp[4t]. \end{array}\right.$$